

文章编号: 1000-8055(2005)01-0098-06

考虑辐射效应的多孔材料传热 有限元算法

张洪武, 付振东

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 应用有限元法求解一维半透明多孔介质辐射对流传热问题。通过对辐射传递方程与边界条件中积分项的离散, 推导出有限元求解列式。对于多孔介质传热控制方程和气体传热控制方程的求解, 采用时间积分技术对两相温度统一进行求解。而对于边界方程处理, 则通过传热方程与边界方程的循环求解, 求出任意时刻温度场的瞬态解。给出数值算例, 得出了放置在通风口、同时受到伴随辐射作用的半透明多孔介质传热的瞬态解, 讨论了部分参数对瞬态温度场以及换热效果的影响。

关键词: 航空、航天推进系统; 半透明多孔介质; 对流传热; 辐射热传递

中图分类号: V 231.1; TK124

文献标识码: A

Finite Element Method for Heat Conduction Analysis in Porous Media with Consideration of Radiative Effects

ZHANG Hong-wu, FU Zhen-dong

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A finite element method for the computation of coupled heat transfer problems in the translucent porous medium was developed. Deducing control equations to the finite element computing forms was realized. Transient solutions of heat transfer through a translucent porous medium placed in a flow passage and submitted to incident radiation were obtained. The one-dimensional physical model took into account simultaneously the heat conduction, convection and radiation in the porous medium, which was assumed to be homogenous continuum, absorb, emit, and scatter thermal radiation. The coupled equations of conductive and convective heat transfer have to be solved simultaneously. Some techniques were used so that the coupled equations and the radiation heat transfer equation could be transformed into the computing forms. The initial temperature conditions were introduced in the iterative computation, and thus the transient solutions were obtained using time integration technique. The effects of some material parameters on transient temperatures were investigated by numerical computations.

收稿日期: 2004-04-12; **修订日期:** 2004-06-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目、重点基金资助项目(10225212; 10332010);
国家基础性发展规划项目资助(G1999032805)

作者简介: 张洪武(1964-), 男, 辽宁大连人, 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室、工程力学系教授、博士生导师, 博士, 主要从事多相多孔介质力学、计算非线性固体力学以及微细观力学方面的研究

Key words: aerospace propulsion system; translucent porous medium;
convective heat transfer; radiation heat transfer

在多孔介质传热传质研究问题当中, 一个特殊问题是研究当多孔介质具有吸收、发射以及散射性能情况下的能量传递过程, 这类问题与诸如高速飞行器的高温现象、核反应堆、核爆炸、火箭推进、核聚变的等离子发生器、腐蚀系统和高温高压燃烧室等问题相关。这类问题的研究具有相当的难度。首先, 对于参与辐射的介质, 能量的吸收、发射和散射不仅发生在系统的边界上, 而且会发生在介质的内部空间, 对能量交换问题的求解需要知道介质各点处的温度、辐射强度及物性, 数学描述相对复杂; 此外, 控制方程中的与辐射能量相关的辐射项通常是以积分形式给出的, 而传导项则包含有微分项, 所以控制方程是非线性积分-微分方程, 该类问题的求解较常规模型要复杂的多, 非线性程度大大增强。

对于一般的对流换热的理论分析与数值计算工作, 国内外已有相当多的研究成果^[1~10], 而对于具有辐射效应的半透明多孔介质瞬态导热换热问题的计算工作还不多见。文献^[11, 12]主要研究了考虑辐射效应的模型构建问题。而在数值方法当中, 有限差分方法则是这类问题求解的代表性方法^[12]。有限元方法由于其良好的通用性, 自出现以来, 已得到越来越广泛的应用, 已被成功地应用于常规换热问题地分析。本文的目的是进一步利用有限元法对多孔半透明介质的热对流、传导和辐射换热相互耦合的问题进行分析计算, 以探索问题求解的新方法。

1 多孔介质传热模型

为叙述方便, 首先对文中常用的符号进行说

明。下标: g 表示气体, p 表示多孔介质, ρ 表示密度, C 表示比热, T 为温度, k 表示热传导率, q_r 为辐射热流, h 为热传导系数, A_v 为多孔介质单位体积的表面积, ω 为散射反照率 ($\omega = \alpha_s/\beta$), α_s 为散射系数, β 为消光系数, n 为折射率, σ 为斯蒂芬-波尔兹曼系数, $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$, I 是辐射强度, μ 为与 x 轴正方向所成角的余弦值, U_g 是气相速度, p_n 为勒让德多项式, a_n 为相函数的展开系数, N^+ 为各项异性散射度, q 为伴随辐射热流, α 为吸收系数, ϵ 为边界发射率, ρ^d 为反射率, τ 为透射率。

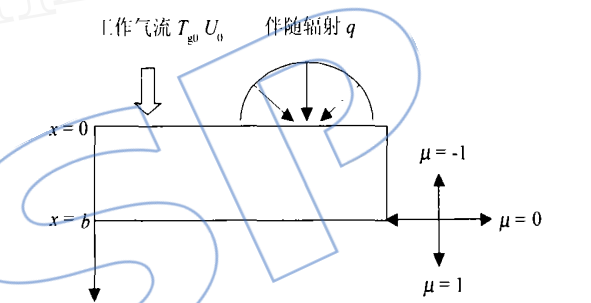


图 1 物理模型
Fig 1 Physical model

图 1 是要研究的物理模型。考虑的是一个具有吸收、辐射、散射作用的半透明多孔介质板的传热、换热问题。平板的一个表面受到恒温气流作用的同时, 并有伴随辐射作用。为了方便问题的求解, 本文采取一维模型进行分析, 且认为物理参数不随温度变化而变化, 流体项不可压缩, 介质每个截面上的质量流率恒定且气体具有非辐射特征。问题的控制方程表述如下:

$$\rho_p C_p \partial T_p(x, t) / \partial t = k_p \partial^2 T_p / \partial x^2 - \partial q_r / \partial x - h A_v (T_p - T_g)$$
 (1)

$$\rho_g C_g [\partial T_g(x, t) / \partial t + U_g \partial T_g(x, t) / \partial x] = k_g \partial^2 T_g / \partial x^2 + h A_v (T_p - T_g)$$
 (2)

其中:

$$\frac{\partial q_r}{\partial x} = (1 - \omega_b) \beta \left[4 n^2 \sigma T_p^4(x, t) - 2 \pi \int_1 I(x, \mu) d\mu \right]$$
 (3)

方程(1)和(2)的右端项表示气体与多孔介质之间的热交换。
在不考虑极化的情况下, 控制介质辐射域的准稳态辐射传递方程为:

$$\mu \beta^{-1} \partial I(x, \mu) / \partial x + I(x, \mu) = (1 - \omega_b) n^2 \sigma T_p^4(x, t) / \pi + 0.5 \omega_b \int_1 I(x, \mu') p(\mu, \mu') d\mu'$$
 (4)

上式相函数以 Legendre 多项式的形式给出, 即:

$$p(\mu', \mu) = \sum_{n=0}^{N^*} a_n p_n(\mu) p_n(\mu') \quad a_0 = 1 \quad (5)$$

边界与初始条件为: 多孔介质的两个表面有反射和吸收作用, 多孔介质和气体初始温度相同

$$T_p(x, 0) = T_g(x, 0) = T_0 \quad (6)$$

在时间大于零的瞬间, 介质受到具有恒温气流的作用。在 $x = 0$ 的表面气体的温度是恒定的

$$T_g(0, t) = T_{g0} \quad (7)$$

在 $x = 0$ 的多孔介质表面上的温度是由热流的连续性条件决定的, 形式为:

$$\alpha q - h[T_g(0, t) - T_{g0}] - \epsilon_0 n^2 \sigma T_p^4(0, t) + k_p \left[\frac{\partial T_p}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad (8)$$

在 $x = b$ 处的气体和多孔介质的温度边界条件为:

$$\left[\frac{\partial T_p(x, t)}{\partial x} \right]_{x=b} = 0 \quad \left[\frac{\partial T_g(x, t)}{\partial x} \right]_{x=b} = 0 \quad (9)$$

在 $x = 0$ 表面多孔介质是半透明的, 在 $x = b$ 处是不透明的(绝热的), 因此, 辐射边界条件是:

$$I(0, \mu) = \epsilon_0 n^2 \sigma T_p^4(0, t) / \pi + \tau h^2 q / \pi + 2\rho_0^d \int T(0, -\mu') \mu' d\mu' \quad \mu > 0 \quad (10)$$

$$I(b, -\mu) = \epsilon_0 n^2 \sigma T_p^4(b, t) / \pi + 2\rho_b^d \int T(b, \mu') \mu' d\mu' \quad (\mu > 0) \quad (11)$$

2 辐射强度方程有限元求解

所研究的问题涉及三变量耦合非线性方程系统的求解。由于不考虑气体相的辐射, 对于辐射强度方程来说, 如果把非线性项 $T_p^4(x, t)$ 当作已知量(可由初始条件确定), 方程就化为一个关于辐射强度 $I(x, \mu)$ 的解耦方程, 可以对方程进行独立的离散求解。

辐射强度方程(4)中含有高度非线性项 T_p^4

$$\mu_i \beta^{-1} \partial I_i(x) / \partial x + I_i(x) = C_i(x) + 0.5 \omega \Delta \mu \sum_{j=-M}^M I_j(x) P_{ji} \quad (j \neq 0) \quad (12)$$

其中:

$$C_i(x) = (1 - \omega) n^2 \sigma T_p^4(x, t) / \pi$$

对于特定的时间步, 认为此项是常数。相应地将辐射边界条件也进行离散, 有:

$$I_i(0) = C_1 + C_2 + 2\rho_0^d \Delta \mu \sum_{j=1}^M I_{-j}(0) \mu_j \quad (\mu > 0) \quad (13)$$

$$I_{-i}(b) = C_3 + 2\rho_b^d \Delta \mu \sum_{j=1}^M I_j(b) \mu_j \quad (\mu > 0) \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mu_j &= (1/M) \times j, & C_1 &= \epsilon_0 n^2 \sigma T_p^4(0, t) / \pi \\ C_2 &= \tau h^2 q / \pi, & C_3 &= \epsilon_0 n^2 \sigma T_p^4(b, t) / \pi \end{aligned} \quad (15)$$

再将 x 轴离散为 N 个有限单元。对每个单元, 方程(12)成立, 在边界需考虑两个边界条件(13)和(14)。

每个单元都对应 $2M$ 个相互耦合的方程, 这

(x, t), 本文将 $T_p^4(x, t)$ 在求解过程中进行迭代处理, 为保持数值稳定性, 采用小步长显式积分格式。

为了去掉积分项, 首先对 μ 进行离散。在 -1 到 1 之间取 $2M$ 个点, 分别为 $-1.0, -\frac{M-1}{M}, \dots, -\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{M-1}{M}, 1.0$ 。于是将辐射能量方程离散为 $2M$ 个相互耦合的一阶线性微分方程:

$$I_l^{ie}(x) = N_j(x) \bar{I}_{ij}^e$$

$(i = 1, 2, \cdots, \text{Node})$
其中Node 为单元节点数, $N_j(x)$ 为形函数。不失一般性, 采用两点单元(Node= 2)。将方程两端同时乘以虚变量 $\delta I_i^e(x)$, 并在域内进行积分, 可得:

$$\int_e \delta I_i^e \left[\mu_i \beta^{-1} \partial I_i^e(x) / \partial x + I_i^e(x) - C_i(x) - 0.5 \alpha_h \Delta \mu \sum_{j=-M}^M I_j^e(x) P_{jl} \right] dL^e = 0 \tag{16}$$

得到单元的单刚以后, 对边界单元考虑相应的边界条件, 最后组装形成总刚和右端项。由于将 x 方向厚度等分为 N 个单元, 并根据边界条件消去了 $2M$ 个变量, 形成了具有 $N \times 2M$ 个未知量的总刚以及相应的线性代数方程组:

$$[K] \{u\} = \{P\} \tag{17}$$

这里向量 u 由 $\overline{I}_{ij}^e$ 组成。

3 多孔介质与气体传热耦合方程的求解

方程(1)和(2)中都有 T_p 和 T_g , 必须同时求解。首先对方程进行空间离散, 对 x 轴方向(即板厚)进行单元划分, 应用有限元基本原理对方程(1)和(2)及他们的边界条件进行处理。以方程(1)为例(方程(2)的形式相对简单), 变分方程为:

$$\int_e \delta T_p \{ \rho_p C_p T_p - k_p T_{p,xx} + C_1 + h A_v (T_p - T_g) \} dL + \int_e \delta T_p \{ C_2 + K_p T_{p,x} \} dS = 0 \tag{18}$$

上式中的两个常数是:

$$C_1 = (1 - \alpha_h) \beta \left[4n^2 \sigma T_p^4(x_i, t_i) - 2\pi \sum_{j=-M}^M I(x_i, \mu_j) \Delta \mu \right]$$

$$C_2 = \alpha q - h [T_p(0, t) - T_{g0}] - \epsilon_0 n^2 \sigma T_p^4(0, t)$$

i 为单元号, $j \neq 0$ 。

类似的变分形式应用于式(2), 采取和常规有限元方法相同的离散方法, 通过单刚推导和组集总刚, 得到以温度为未知量的线性方程组, 形式如下:

$$[M] \{\dot{T}\} + [K] \{T\} = \{P\} \tag{19}$$

至此, 对耦合方程的空间离散已全部完成。进一步对时间域进行离散。取时间步长 Δt , 在时间 t 到 $t + \Delta t$ 内, 有:

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \theta K \right] T_{t+\Delta t} = (1 - \theta) f_t + \theta f_{t+\Delta t} - (1 - \theta) K T_t + \frac{M T_t}{\Delta t} \tag{20}$$

取 $\theta \geq 0.5$ 为无条件稳定算法。

利用上式并由初始与边界条件以及辐射强度方程有限元列式可以对任意时刻的介质和气体的温度进行求解。

4 数值算例

作为理论、算法以及编制程序的应用, 本节给出数值算例。作为程序验证, 首先对于固相与气体各自独立工作的情况进行了计算, 即令:

$$h = 0, \quad \frac{\partial q_r}{\partial x} = 0$$

则对流传热方程可以解耦, 此时问题化为一般的传热问题, 通过数值计算表明, 所开发的程序与其他程序的计算结果是一致的。以下研究 $h \neq 0$, $\partial q_r / \partial x \neq 0$ 的情况。

固体与气体初始温度均为 0°C 。边界条件: 右端(下部)为绝热边界条件, 左端施加前述(7)~

(9)所描述的边界条件。气体温度固定在 0°C 。其他参数为:

$$\rho_p = 3\,000 \text{ kg/m}^3, \quad C_p = 0.4 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$$

$$k_p = 1.3 \text{ J/(m s}^\circ\text{C)}, \quad \rho_g = 1 \text{ kg/m}^3$$

$$C_g = 0.5 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$$

$$k_g = 0.092 \text{ J/(m s}^\circ\text{C)}, \quad \alpha_h = 0.5$$

$$n = 1.5, \quad \beta = 0.6, \quad \rho_0^d = 0.01$$

$$\rho_e^d = 1.0, \quad q = 10^5, \quad h = 1.0$$

区域的长度取 0.1 m , $M = 10$, 对板厚 20 等分, 即 $N = 20$ 。

由于所研究问题的强非线性特性, 首先考察的是算法的数值结果与时间步长选取的关系。在考察过程中, 时间步长取 $0.0001 \text{ s} \sim 5 \text{ s}$ 之间进行计算, 并取其中部分结果进行比较, 可以发现在

选取不同时间步长的情况下,数值解果基本上是一致的,这在另外一个方面说明了本文在时间步长选取与积分算法方面的可靠性。

研究不同的流速 U_g 的变化对多孔介质瞬态温度的影响。通过对 U_g 的不同取值可以得到相应的计算结果。图 2 给出 $A_v = 200 \text{ m}^2/\text{m}^3$ 情况下不同 U_g 值在 20 s (趋于稳态) 的计算结果。可以看到,气体流速 U_g 的变化对换热有明显影响,随着

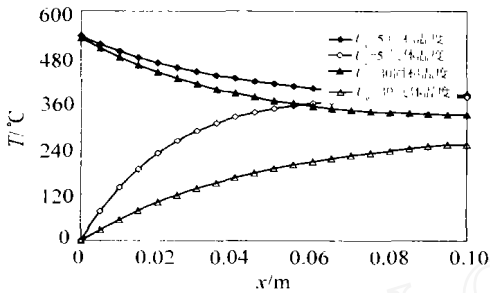


图 2 不同气体速度对温度分布的影响

Fig 2 Temperature distributions under different gas velocity

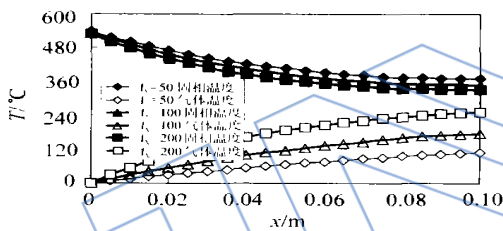


图 3 不同的多孔介质单位体积表面积对温度分布的影响

Fig 3 Temperature distributions under different surface area per unit volume of porous medium

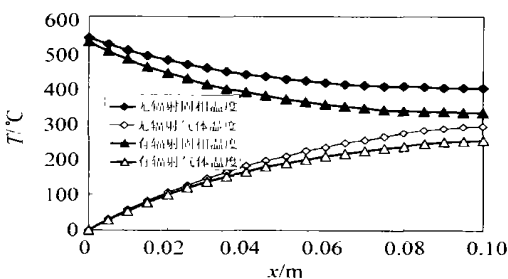


图 4 考虑与不考虑辐射热传递的温度分布

Fig 4 Temperature distributions with and without consideration of radiation on heat transfer

气流速度的增加,对固相的降热效果明显提高。

观察方程(1)和(2)可以发现, A_v 的取值可以直接影响多孔介质和气体之间的换热。在 $U_g = 30 \text{ m/s}$ 情况下,取不同的 A_v 值进行计算,对 20 s 多孔介质和气体的温度结果作为比较,计算结果如图 3 所示。可以看到在固体介质与气体之间换热存在时 ($A_v \neq 0$),多孔介质的温度得到了不同程度的降低,通过调整参数可以达到预期的降温效果。

为了研究辐射热传递的影响,图 4 进一步 $A_v = 200 \text{ m}^2/\text{m}^3$, $U_g = 30 \text{ m/s}$ 情况下考虑辐射热传递和不考虑辐射热传递(不考虑式(3)项) 20 s 的热分布计算结果。可以发现,此时热辐射传递的热量在总的传热换热中具有相当大的比例,分析中应引起足够的重视。

5 结 论

(1) 对复杂边界条件进行处理,将辐射强度方程化为一阶线性微分方程组。

(2) 对方程的有限元离散,将连续体辐射传热控制方程化成有限元求解形式。

(3) 针对热传导耦合方程非线性项的处理,通过对两个方程系统的循环迭代求解,最终获得瞬态传热问题的解。

(4) 通过数值计算,研究了多孔介质单位体积的表面积、气流速度对换热过程的影响。

(5) 研究工作表明,一定情况下热辐射传递的热量在总的传热换热中具有一定的比例,表明了考虑辐射热传递的必要性。

研究表明,有限元方法对于此类具有辐射、积分型边界条件问题的分析同样是有有效的。

参考文献

- [1] 西格尔 R, 豪厄尔 J R. 热辐射传热[M]. 曹玉璋, 黄素逸, 陆大有, 等译. 北京: 科学出版社, 1990
- [2] 卡伯绘. 辐射换热的分析与计算[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988
- [3] 孔祥谦. 有限单元法在传热学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998
- [4] 陶文铨. 数值传热学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001
- [5] 王文静, 谢基龙, 刘志明, 等. 基于循环对称结构制动盘的三维瞬态温度场仿真[J]. 机械工程学报, 2002, 38(12): 131~134

WANG Wen-jing, XIE Ji-long, LIU Zhiming, et al. 3-D Transient Temperature Field Analysis and Calculation for Brake Disc with Cyclic Symmetric Structure [J]. Chinese

- Journal of Mechanical Engineering*, 2002, 38 (12): 131~134
- [6] 尹凤福, 李谋渭, 张大志, 等. 1400F 轧机工作辊与冷却液之间的换热特性[J]. *中国有色金属学报*, 2003, 13 (1): 51~55
- Y N Feng-fu, L I Mou-wei, ZHANG Da-zhi, et al. Convective Heat Transfer Analysis Between Working Roll and Coolant Fluid of Mill 1400F [J]. *Chinese Journal of Nonferrous Metals*, 2003, 13 (1): 51~55
- [7] 许杨健, 涂代惠. 对流换热边界下梯度功能材料板瞬态热传导有限元分析[J]. *材料科学与工程学报*, 2003, 21 (1): 76~79
- XU Yang-jian, TU Dai-hui. Transient Heat Conduction Analysis of Functionally Gradient Material Plate with Convective Heat Transfer Boundary by Finite Element Method [J]. *Journal of Materials Science & Engineering*, 2003, 21 (1): 76~79
- [8] Amiri A, Vafai K. Analysis of Dispersion Effects and Non-Thermal Equilibrium, Non-Darcian, Variable Porosity Incompressible Flow Through Porous Media [J]. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1994, 37: 37939~37954
- [9] Ichimiya K, Matsuda T, Kawai Y. Effects of Porous Medium on Local Heat Transfer and Fluid Flow in a Forced Convection Field [J]. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1997, 40: 1567~1576
- [10] Yoshida H, Yun J H, Echigo R, Tomimura T. Transient Characteristics of Combined Conduction, Convection and Radiation Heat Transfer in Porous Media [J]. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1990, 33: 847~857.
- [11] Sghaier T, Cherif B, Sifaoui M S. Theoretical Study of Combined Radiative, Conductive and Convective Heat Transfer in a Semitransparent Porous Medium in a Spherical Enclosure [J]. *JQSRT*, 2002, 45: 751~765
- [12] Kumar S, Majumdar A, Tien C L. The Differential-Discrete-Ordinate Method for Solutions of the Equation of Radiative Transfer [J]. *J. Heat Transfer*, 1990, 112: 424~429